<u>Билет №9</u>

1) Гармоническая линеаризация. Эквивалентная линейная система. Определение параметров колебаний на выходе эквивалентной системы. Эквивалентный коэффициент усиления. Описывающая функция и разложение в ряд Фурье.

9.2.2. Метод гармонической линеаризации

Под ***линеаризацией*** понимают приближенную замену нелинейной функции линейной таким образом, чтобы по какому-то выбранному показателю обе эти функции совпадали.

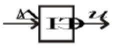

Рис. 9.4. Нелинейный элемент

В способе гармонической линеаризации нелинейный элемент (рис. 9.4) заменяется квазилинейным звеном, параметры которого определяются при синусоидальном входном сигнале

$$\Delta = A\sin(\omega t) \tag{9.5}$$

из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена.

Рассмотрим процедуру линеаризации для нелинейного элемента, уравнение которого имеет вид

$$u = f(\Delta, \dot{\Delta}). \tag{9.6}$$

При поступлении на его вход гармонического сигнала (9.5) на выходе звена в установившемся режиме также будет периодический, но несинусоидальный сигнал

$$u = f\left[A\sin(\omega t), A\omega\cos(\omega t)\right] = f(A, \omega t). \tag{9.7}$$

Разложим его в ряд Фурье [11] и получим

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[b_k \sin(k\omega t) + c_k \cos(k\omega t)\right], \tag{9.8}$$

где будем полагать $u_0 = 0$, что справедливо для симметричной нелинейной характеристики (9.6).

С учетом (9.7) коэффициенты ряда Фурье (9.8) определяются известными соотношениями

$$\begin{cases} b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(A, \omega t)\sin(k\omega t)\, d(\omega t), \\ c_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(A, \omega t)\cos(k\omega t)\, d(\omega t). \end{cases}$$

Используем только первые члены ряда разложения в (9.8), пренебрегая высшими гармониками, и получим

$$u \approx b_1 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t). \tag{9.9}$$

Учтем, что $\Delta = A\sin(\omega t)$, а $\dot{\Delta} = A\omega\cos(\omega t)$, следовательно,

$$\begin{cases} \sin(\omega t) = \dfrac{\Delta}{A}, \\ \cos(\omega t) = \dfrac{\dot{\Delta}}{A\omega}. \end{cases} \tag{9.10}$$

После подстановки (9.10) в (9.9) получим выражение для выходного сигнала нелинейного звена

$$u = \frac{b_1}{A}\Delta + \frac{c_1}{A\omega}\dot{\Delta},$$

которое, если принять обозначения

$$\begin{cases} q_1(A, \omega) = \dfrac{b_1}{A}, \\ q_2(A, \omega) = \dfrac{c_1}{A}, \end{cases} \tag{9.11}$$

можно записать в виде

$$u = q_1(A, \omega)\Delta + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega}\dot{\Delta}. \tag{9.12}$$

Здесь $q_1(A, \omega)$ и $q_2(A, \omega)$ – коэффициенты гармонической линеаризации.

Как видим, уравнение нелинейного звена (9.12) с точностью до высших гармоник является квазилинейным. При постоянных значениях амплитуды входного сигнала A коэффициенты гармонической линеаризации $q_1(A, \omega)$ и $q_2(A, \omega)$ являются постоянными. Однако различным значениям амплитуды A соответствуют разные коэффициенты $q_1(A, \omega)$ и $q_2(A, \omega)$. В этом заключается отличие гармонической линеаризации от обычной (см. разд. 8).

Таким образом, вместо нелинейного элемента с характеристикой (9.6) можно рассматривать эквивалентное линейное звено, поведение которого описывается уравнением (9.12). Оно может быть представлено в операторной форме

$$u = \left[q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega}p\right]\Delta. \tag{9.13}$$

Для гармонически линеаризованного нелинейного элемента можно записать передаточную функцию

$$W_{\text{нэ}}(p, A, \omega) = \frac{u}{\Delta} = q_1(A, \omega) + \frac{q_2(A, \omega)}{\omega}p \tag{9.14}$$

и получить из нее выражение для частотной характеристики

$$W_{\text{нэ}}(A, j\omega) = q_1(A, \omega) + jq_2(A, \omega). \tag{9.15}$$

В случае статической нелинейной характеристики вместо (9.6) имеем

$$u = f(\Delta)$$

и уравнение (9.13) принимает вид [1]

$$u = \left[q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega}p\right]\Delta, \tag{9.16}$$

где коэффициенты гармонической линеаризации $q_1(A)$ и $q_2(A)$ зависят только от амплитуды. При этом получим передаточную функцию

$$W_{\text{нэ}}(p, A, \omega) = q_1(A) + \frac{q_2(A)}{\omega}p \tag{9.17}$$

и частотную характеристику

$$W_{\text{нэ}}(A, j\omega) = q_1(A) + jq_2(A) \tag{9.18}$$

статического нелинейного звена.

Для однозначной статической нелинейной характеристики коэффициент $q_2(A) = 0$, и вместо (9.15) получим

$$W_{\text{нэ}}(A, j\omega) = q_1(A). \tag{9.19}$$

Коэффициенты гармонической линеаризации типовых статических нелинейных звеньев приводятся в литературе (например, в [1, 10]).

1. Описывающая функция:

$$y_N = F(x)$$

$$y_N = F(X, \dot{X})$$

$$x(t) = X_m \sin(\omega t)$$

Периодический процесс на выходе НЛ элемента может быть представлен в виде разложения в ряд Фурье

$$y_N = F[x(t)] = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_{pk} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} y_{Qk} \cos k\omega t \quad (3.50)$$

$$y_{pk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \sin k\omega t \, d(\omega t) \quad (3.51)$$

$$y_{Qk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \cos k\omega t \, d(\omega t)$$

В общем случае, они зависят как от амплитуды входного сигнала Xm, так и от частоты w (это для 2 Ypk).

Для ненагруженных элементов (без среднего сигнала и внешних возмущений) $Y_0=0$ (т.е. смещения сигналов на вх/вых нет). После гармонической линеаризации вх. сигнала $y_N(t)$, должны быть получены аппроксимации в виде разложения в ряд Фурье.

Т.е. верхняя сумма синусоид (нелинейный ряд фурье 3.50 – какая то постоянная величина плюс сумма гармоник). На выходе должны получить при нулевом смещении Y0=0 (3.53) – в котором учитываются только первые линейные гармоники. Далее переводим все в комплексную форму (sin + cos = e с какой то степенью).

$$y(t) \approx y_{p1} \sin \omega t + y_{Q1} \cos \omega t \quad (3.53)$$

$$y(t) = Im\{(y_{p1} + j y_{Q1}) e^{j\omega t}\} \quad (3.54)$$

$$y_{p1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \sin \omega t \, d(\omega t) \quad (3.55)$$

$$y_{Q1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t) \cos \omega t \, d(\omega t) \quad (3.56)$$

Последние два уравнения это коэффициенты в 3.53 – скалярные произведения в пространстве функций нашей изображающей функции, которую линеаризуем F(x) на наш синус и на наш косинус.

2. Эквивалентный коэффициент усиления G_N : находится как отношение первых гармоник выхода ко входу. Для этого запишем:

$$G_N(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m) = \frac{Y_{P1}}{X_m} + j\frac{Y_{Q1}}{X_m} = |G_N(X_m)|e^{j\varphi_N} \quad (3.57)$$

$$P(X_m) = Y_{P1}/X_m = \frac{1}{\pi X_m}\int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t)\sin \omega t \, d(\omega t) \quad (3.58)$$

$$Q(X_m) = Y_{Q1}/X_m = \frac{1}{\pi X_m}\int_0^{2\pi} F(X_m \sin \omega t)\cos \omega t \, d(\omega t) \quad (3.59)$$

Где Y_{P1} и Y_{Q1} – коэффициенты гармонической линеаризации.

Коэффициент усиления это отношение выхода ко входу. А выход и вход мы приняли линейными гармониками, значит это отношение линейных гармоник. Дальше посчитали, поделили одну на другую, написали чему это равно.

Выход y(t) вход x(t). В конце переводим в экспоненциальную форму. 3.57.

$$\begin{cases} |G_N(X_m)| = \dfrac{Y_{m1}}{X_m} = \dfrac{\sqrt{Y_{P1}^2 + Y_{Q1}^2}}{X_m} \\ \varphi_N = \operatorname{arctg} \dfrac{Y_{Q1}}{Y_{P1}} \end{cases} \quad (3.60)$$

Из (3.60) следует, что для безынерционных НЛ меняется зависимость только от амплитуды $X_м$ входного сигнала, но не от его частоты.

2) Оценивание возмущений, модель внешней среды, квазимногочлены, процедура оценивания, модель углового движения искусственного спутника Земли по крену и оценка возмущающего момента. Анализ результатов моделирования.

Квазимногочлены. Процедура оценивания

Простой вариант синтеза основан на исп. внеш. процессов ~~ат~~ предст. как квазимногочлены

$\sum_{i=1}^{N} e^{\lambda_i t} P_i(t)$, $\lambda_i \in C$

$P_i(t)$ – многочлен с коэфф.

~~в~~ Источники таких процессов – ~~лн.~~ лин. дифф. ур-е с пост. коэффициентами.

$f(t), v(t) \Leftrightarrow \dot{x}_s(t) = A_s(t) x_s(t)$

$y_s(t) = C_s x_s(t)$ (8.15)

$x_s(t_0) = x_{s0}$ $t \geq t_0$

$x_s(t) \in R^{n_s}$ – вектор сост. функц. выход модели ист. возмущений:

$y(t) \in R^{n+l}$

$y_s(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$ $C_s = \begin{bmatrix} C_f \\ C_v \end{bmatrix}\begin{matrix} n \times n_s \\ l \times n_s \end{matrix}$

A_s, C_s – матр. изв.

Опр. связь между $x_s(t)$ и возмущениями $f(t)$ и помехами $v(t)$

$x_s(t)$ – сост. модели внеш. воздействий.

x_{s0} – ?

$$\bar{x}(t) \triangleq (x(t), x_s(t)) \in R^{n+n_s}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & C_f \\ 0_{n_s \times n} & A_s \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n_s \times m} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C, C_v]$$

блочная матр. из др. матриц.

нулевая матр.

$$\bar{n} = n + n_s$$

n – из объекта

n_s – из среды

<u>Модель углового движения ИСЗ по крену и оценка возмущающего момента. Анализ результатов моделирования</u>

Рассмотрим упрощенную модель углового движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) по крену

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} = u(t) + M(t), \tag{8.17}$$

где J_x – момент инерции ИСЗ относительно продольной оси, $\gamma(t)$ – угол крена, $u(t)$ – управляющий момент, $M(t)$ – возмущающий момент. Пусть доступна измерению угловая скорость крена $\omega_x(t) \triangleq \dot{\gamma}(t)$. Значения $u(t)$ также считаются известными. Подлежит оцениванию неизмеряемый момент возмущений $M(t)$. Будем полагать его линейной функцией времени $M(t) = M_0 + Vt$, причем M_0, V – неизвестные величины.

Этот процесс можно представить как решение системы однородных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{M}(t) & = & V(t), \\ \dot{V}(t) & = & 0 \end{array} \right. \qquad (8.18)$$

с неизвестными начальными условиями $M(0)$, $V(0)$. Введем вектор состояния системы "объект – среда" $\bar{x}(t) \triangleq [\omega_x(t), M(t), V(t)]^T$. Выход системы $\bar{y}(t) = \omega_x(t)$. Таким образом, приходим к уравнениям состояния вида (8.16), в которых

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [1, 0, 0]. \qquad (8.19)$$

Обратимся к синтезу наблюдателя. Наблюдатель полного порядка (8.3) для системы (8.17), (8.18) имеет размерность $\bar{n} = 3$. Переменные состояния наблюдателя $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_1(t)$ служат оценками переменных $\omega_x(t)$, $M(t)$, $V(t)$ соответственно. Для определения трехмерного вектора параметров L наблюдателя найдем характеристический многочлен $\det(s\mathbf{I}_3 - \bar{A} + L\bar{C}) = s^3 + l_1 s^2 + \dfrac{l_2}{J_x}s + \dfrac{l_3}{J_x}$. Приравняв его к стандартному многочлену Баттерворта
$A_н(s) = s^3 + 2\Omega_0 s^2 + 2\Omega_0^2 s + \Omega_0^3$, получим выражения для l_i : $l_1 = 2\Omega_0$, $l_2 = 2J_x\Omega_0^2$, $l_3 = J_x\Omega_0^3$. Параметр Ω_0 задает быстродействие наблюдателя. Время переходного процесса составляет примерно $5/\Omega_0$. В развернутой форме уравнения наблюдателя (8.3) принимают в данном случае вид

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\hat{\omega}}_x(t) & = & -l_1\hat{\omega}_x(t) + \hat{M}(t)/J_x + l_1\omega_x(t) + u(t)/J_x, \\ \dot{\hat{M}}(t) & = & -l_2\hat{\omega}_x(t) + \hat{V}(t) + l_2\omega_x(t), \\ \dot{\hat{V}}(t) & = & -l_3\hat{\omega}_x(t) + l_3\omega_x(t). \end{array} \right. \qquad (8.20)$$